Avec : $\mathrm{Res}(f, ia) = \dfrac{-2a^2}{2ia}\,\dfrac{e^{-a}}{ia} = a e^{-a}$

D'où : $J_a^R = 2\pi i a e^{-a}$

On conclut donc que : $\lim\limits_{R\to\infty} J_a^R = i\pi + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi i a e^{-a}$

Finalement : $I_a = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\left(2ae^{-a}-1\right)$

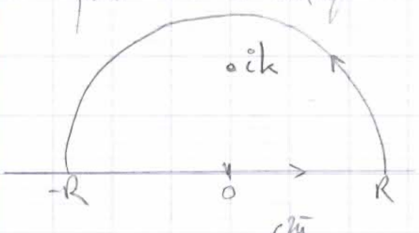
Ex 6.3

6.3.1 On a : $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$ $\quad (a,b)>0, \quad n \in \mathbb{N}^*$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{a}{b}+x^2\right)^n} \quad \text{on pose } k=\sqrt{\tfrac{a}{b}}$$

$$= \frac{1}{2b^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(k^2+x^2)^n}$$

On part de l'intégrale : $J_n = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(k^2+z^2)^n}$ $\quad R>k$



$$H_R^1 = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(k^2+x^2)^n} \qquad H_R^2 = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{(k^2+R^2e^{2i\theta})^n}\,d\theta$$

On a : $|H_R^2| \leq \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{R}{(-k^2+R^2)^n}\,d\theta = \frac{\pi R}{(R^2-k^2)^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

Par le théorème des résidus, on a :

$$J_n = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, ik) \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{(k^2+z^2)^n} = \frac{1}{(z-ik)^n(z+ik)^n}$$

On a : $\mathrm{Res}(f, ik) = \dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\dfrac{1}{(z+ik)^n}\right) = \left(\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)!}(z+ik)^{-n-(n-1)}\right)\Bigg|_{z=ik}$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2}(2n-1)!\,(2ik)^{-2n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2}(2n-1)!\, i\,(-1)^n\,(2k)^{-2n+1}$$

$$= -\frac{(2n-1)!}{(n-1)!^2}\, i\,(2k)^{-2n+1}$$